

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ\*

Фикрет А. Алиев<sup>1</sup>, Н.А. Исмаилов<sup>1,2</sup>, Ю.С. Гасимов<sup>1</sup>, А.А. Намазов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан

<sup>2</sup>Институт Информационных Технологий, Баку, Азербайджан

e-mail: [f\\_aliev@yahoo.com](mailto:f_aliev@yahoo.com), [gasimov.yusif@gmail.com](mailto:gasimov.yusif@gmail.com)

**Резюме.** Рассматривается обратная задача по определению параметров, входящих в правую часть системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных и конечных условиях. Решение этой задачи сводится к решению задачи минимизации квадратичного функционала, являющегося отклонением значения решения в конечной точке от заданных величин. Используя метод квазилинеаризации, предлагается вычислительный алгоритм решения искомой задачи. Результаты иллюстрируются на примере нахождения коэффициента гидравлического сопротивления течения в трубах.

**Ключевые слова:** гидравлик сопротивление, газожидкостная смесь, ортогонализация Грамм-Шмидта.

**AMS Subject Classification:** 49J15, 49J35.

### 1. Введение

Как известно, задачи идентификации играют важную роль в решении многих прикладных задач из физики, гидродинамики, добычи нефти [2,8,11,15] и др. Существуют различные способы для решения таких задач, одним из которых является применение методов оптимизации [3,9,14]. В этом процессе важную роль играет удачный выбор соответствующего оптимизируемого функционала. Так как многие прикладные задачи в основном описываются нелинейными системами, то выбор такого функционала и дальнейшее решение соответствующих задач оптимизации является проблематичным [8]. Одним из способов преодоления этих трудностей является использование итерационного метода квазилинеаризации [12,13]. Сходимость этого метода подробно изучена в [12,19].

В настоящей работе рассматривается многомерная задача идентификации для определения параметров, входящих в правую часть системы нелинейных дифференциальных уравнений при заданных начальных

---

\* Эта работа поддержана совместным грантом НАНА и ГНКАР 17, 2013-2015г. и грантом «50+50» Бакинского Государственного Университета.

\* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 07.10.2014

и конечных данных. Решение этой задачи сводится к решению задачи оптимизации, в которой минимизируемый функционал составляется как квадратичное отклонение решения системы в конце отрезка от заданных значений. Так как в поставленной нелинейной формулировке нахождение решения этой задачи представляет определенную трудность [13,18], то методом квазилинеаризации исходная система приводится к линейной системе относительно фазовых координат и вектора параметров. Составляется квадратичный функционал для полученной задачи и выводится выражение для его градиента. С помощью метода ортогонализации Грамма-Шмидта [2] приводится вычислительный алгоритм нахождения оптимума, позволяющий определить искомые параметры. Работа этого алгоритма демонстрируется на примере, который описывает течение жидкостей в трубах.

## 2. Постановка задачи

Пусть движение объекта описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = f(y(t), \alpha), \quad (1)$$

где  $y$  -  $n$ -мерный фазовый вектор,  $f$  -  $n$ -мерная непрерывная в интервале  $(0, T)$  дифференцируемая функция,  $\alpha$  -  $m$ -мерный постоянный вектор, подлежащий нахождению,  $t$  - независимая переменная. Пусть заданы начальные условия

$$y^i(0) = y_0^i, \quad \overline{i = 1, N}. \quad (2)$$

где  $n, m, N$  заданные натуральные числа.

Задача состоит в определении такого вектора  $\alpha$ , при котором решение задачи Коши (1), (2) в конечной точке  $T$  удовлетворяет заранее заданным условиям

$$y^i(T) = y_T^i, \quad \overline{i = 1, N}, \quad (3)$$

Такие задачи часто встречаются на практике [2, 3, 10, 11], когда начальные данные (2) задаются, а конечные (3) статистически измеряются. В таких случаях требуется найти вектор параметров  $\alpha$  из (1) так, чтобы и решение с заданными начальными данными (2) в конечной точке получало значения, максимально близкие статистическим данным (3). Отметим, что такие задачи возникают также при добыче нефти, когда требуется определить коэффициент гидравлического сопротивления [2].

### 3. Метод решения

Поскольку функция  $f(y, \alpha)$  является нелинейной, для решения задачи (1)-(3) следует применить некоторый численный метод, например, метод квазилинеаризации [12,13]. Поэтому для решения задачи (1) - (3) в первом этапе линеаризуем уравнение (1). Для этого выбирается некоторая номинальная траектория  $y^0(t)$  и параметр  $\alpha^0$ , и предполагается, что  $k$ -я итерация уже выполнена. Линеаризуем уравнение (1) около этих данных до порядка  $O(x - x_0, \alpha - \alpha_i)$

$$\begin{aligned} \dot{y}^k = & \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial y} y^k + \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial \alpha} \alpha^k + f(y^{k-1}, \alpha^{k-1}) - \\ & - \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial y} y^{k-1} - \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial \alpha} \alpha^{k-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

После интегрирования линейного дифференциального уравнения (4) с условием (2) получим следующее представление [7]

$$y^k(t) = \Phi^{k-1}(t, t_0) \cdot y^k(t_0) + \Phi_1^{k-1}(t, t_0) \cdot \alpha^k + \Phi_2^{k-1}(t, t_0), \quad (5)$$

где  $\Phi^{k-1}(t, t_0)$  является фундаментальной матрицей системы однородных уравнений

$$\dot{y}^k(t) = \frac{\partial f(y, \alpha)}{\partial y} \Big|_{y^k(t_0)} \cdot y^k(t_0), \quad (6)$$

а матрицы  $\Phi_1^{k-1}(t, t_0)$ ,  $\Phi_2^{k-1}(t, t_0)$  вычисляются как в [7]

$$\begin{aligned} \Phi_1^{k-1}(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial \alpha} d\tau, \\ \Phi_2^{k-1}(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \times \\ &\times \left[ f(y^{k-1}, \alpha^{k-1}) - \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial y} y^{k-1} - \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial \alpha} \alpha^{k-1} \right] d\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь матрицы  $\Phi^{k-1}(t, t_0)$ ,  $\Phi_1^{k-1}(t, t_0)$ ,  $\Phi_2^{k-1}(t, t_0)$  имеют размерности  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $n \times 1$ , соответственно.

Для того, чтобы решение  $y^i(T)$  линеаризованных дифференциальных уравнений (4) с начальными условиями (2) в точке  $T$  совпало с результатами измерений  $y_T^i = y_{Ti}$  из (3), построим следующий квадратичный функционал при  $k$ -й итерации

$$I_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [y_i^k(T, \alpha) - y_{Ti}^k]^T A_i^k [y_i^k(T, \alpha) - y_{Ti}^k] \quad (8)$$

где символ “ $T$ ” – означает операцию транспонирования;  $A_i^k$  – постоянная весовая симметричная  $n \times n$  мерная матрица, которая выбирается в каждой итерации, учитывая специфику конкретно поставленной задачи;  $y_{Ti}^k$  –  $n \times 1$  мерный вектор наблюдений;  $y_i^k$  –  $n \times 1$  мерный вектор, который определяется из (5). Тогда решение поставленной задачи приводится к задаче: найти постоянный вектор  $\alpha$ , при котором решение уравнения (1) с начальными условиями (2) минимизирует функционал (8).

Существуют разные алгоритмы минимизации функционала [18] типа (8) с условиями (2), (3), (5). Однако, при решении конкретной задачи, например, задачи, возникающей при добычи нефти, и др. существующие алгоритмы встречаются с определенными трудностями, (например, при получении требуемой точности, скорости сходимости и др.) [18]. Поэтому в [3] предлагается использование метода ортогонализации Грамма-Шмидта.

#### 4. Алгоритм минимизации функционала (8)

Сейчас остановимся на минимизации функционала (8) при помощи соотношения (4) с начальными условиями (2). Если поставить  $y^k(T)$  из (5) в (8), то последняя переходит к виду

$$I_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0) + \Phi_{1i}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha + \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0) - y_{Ti}^k]^T A_i^k \times \\ \times [\Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0) + \Phi_{1i}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha + \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0) - y_{Ti}^k] = \sum_{j=1}^{16} I_k^j \quad (9)$$

где

$$I_k^1 \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0)]^T A_i^k \times \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0), \\ I_k^2 \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0)]^T A_i^k \times \Phi_{1i}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha, \\ I_k^3 \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0)]^T A_i^k \times \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0), \\ I_k^4 \stackrel{def}{=} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0)]^T A_i^k \times y_{Ti}^k,$$

$$\begin{aligned}
 I_k^5 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha]^T A_i^k \times \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0), \\
 I_k^6 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha]^T A_i^k \times \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha, \\
 I_k^7 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha]^T A_i^k \times \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0), \\
 I_k^8 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha]^T A_i^k \times y_{Ti}^k, \\
 I_k^9 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0)]^T A_i^k \times \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0), \\
 I_k^{10} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0)]^T A_i^k \times \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha, \\
 I_k^{11} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0)]^T A_i^k \times \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0), \\
 I_k^{12} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0)]^T A_i^k \times y_{Ti}^k, \\
 I_k^{13} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [y_{Ti}^k]^T A_i^k \times \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0), \\
 I_k^{14} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [y_{Ti}^k]^T A_i^k \times \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \cdot \alpha, \\
 I_k^{15} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [y_{Ti}^k]^T A_i^k \times \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0), \\
 I_k^{16} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [y_{Ti}^k]^T A_i^k \times y_{Ti}^k,
 \end{aligned}$$

а градиент для функционала (9) будет в виде

$$\frac{\partial I_k}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{16} \frac{\partial I_k^j}{\partial \alpha}. \quad (10)$$

Так как слагаемые  $I_k^1, I_k^3, I_k^4, I_k^9, I_k^{11}, I_k^{12}, I_k^{13}, I_k^{15}, I_k^{16}$  не зависят от параметра  $\alpha$ , получим

$$\frac{\partial I_k^1}{\partial \alpha} = \frac{\partial I_k^3}{\partial \alpha} = \frac{\partial I_k^4}{\partial \alpha} = \frac{\partial I_k^9}{\partial \alpha} = \frac{\partial I_k^{11}}{\partial \alpha} = \frac{\partial I_k^{12}}{\partial \alpha} = \frac{\partial I_k^{13}}{\partial \alpha} = \frac{\partial I_k^{15}}{\partial \alpha} = \frac{\partial I_k^{16}}{\partial \alpha} = 0.$$

Опираясь на формулы [16,17]

$$\frac{\partial x^T a}{\partial x} = \frac{\partial a^T x}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial x^T Bx}{\partial x} = (B + B^T)x \quad (11)$$

для градиентов  $I_k^2, I_k^5, I_k^6, I_k^7, I_k^8, I_k^{10}, I_k^{14}$  получим

$$\frac{I_k^2}{\partial \alpha} = \left( \left[ \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0) \right]^T A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \right)^T = \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^{kT} \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0),$$

$$\frac{I_k^5}{\partial \alpha} = \frac{\alpha^T \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0)}{\partial \alpha} = \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0),$$

$$\begin{aligned} \frac{I_k^6}{\partial \alpha} &= \frac{\alpha^T \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \alpha}{\partial \alpha} = \\ &= \left[ \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) + \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^{kT} \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \right] \alpha = (12) \end{aligned}$$

$$= 2\Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \alpha$$

$$\frac{I_k^7}{\partial \alpha} = \frac{\alpha^T \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0)}{\partial \alpha} = \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0),$$

$$\frac{I_k^8}{\partial \alpha} = - \frac{\left[ \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \alpha \right]^T A_i^k y_{Ti}^k}{\partial \alpha} =$$

$$= - \frac{\alpha^T \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k y_{Ti}^k}{\partial \alpha} = - \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k y_{Ti}^k$$

$$\frac{I_k^{10}}{\partial \alpha} = \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^{kT} \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0),$$

$$\frac{I_k^{14}}{\partial \alpha} = - \frac{\left[ y_{Ti}^k \right]^T A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \alpha}{\partial \alpha} = - \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^{kT} y_{Ti}^k.$$

В итоге, если принимать во внимание эти результаты, то градиент функционал (9) окончательно вычисляется по следующей формуле

$$\frac{\partial I_k}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{I_k^2}{\partial \alpha} + \frac{I_k^5}{\partial \alpha} + \frac{I_k^6}{\partial \alpha} + \frac{I_k^7}{\partial \alpha} + \frac{I_k^8}{\partial \alpha} + \frac{I_k^{10}}{\partial \alpha} + \frac{I_k^{14}}{\partial \alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^{kT} \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0) + \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_i^{k-1}(T, t_0) y_i^k(t_0) + \right.$$

$$\left. + 2\Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \alpha + \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0) A_i^k \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k y_{Ti}^k + \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^{kT} \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0) - \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^{kT} y_{Ti}^k) = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( 2\Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^{kT} \Phi_i^{k-1}(T, t_0)y_i^k(t_0) + 2\Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0)\alpha \right. \\
 & \left. + 2\Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0) - 2\Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k y_{Ti}^k \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для градиента функционала  $I_k$  относительно параметра  $\alpha$  получим следующее выражение

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_k}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^N \left[ \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \right] \alpha - \\
 & - \sum_{i=1}^N \left[ \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k y_{Ti}^k - \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^{kT} \Phi_i^{k-1}(T, t_0)y_i^k(t_0) - \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0) \right]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Теперь приравнявая к нулю выражение (10) имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \left[ \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \right] \alpha = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left[ \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k y_{Ti}^k - \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^{kT} \Phi_i^{k-1}(T, t_0)y_i^k(t_0) - \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0) \right]. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Решая уравнения (14) относительно  $\alpha$  получим

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \left[ \sum_{i=1}^N \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \right]^{-1} \times \\
 & \times \sum_{i=1}^N \left[ \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k y_{Ti}^k - \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^{kT} \Phi_i^{k-1}(T, t_0)y_i^k(t_0) - \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k \Phi_{2i}^{k-1}(T, t_0) \right], \quad (15)
 \end{aligned}$$

где предполагается, что  $\left[ \sum_{i=1}^N \Phi_{li}^{k-1T}(T, t_0)A_i^k \Phi_{li}^{k-1}(T, t_0) \right]^{-1}$  существует.

Значения параметра  $\alpha$ , определяемые по формулам (11), (12) (15), являются решением многопараметрической оптимизационной задачи для функционала (9), который доставляет минимум целевому функционалу.

Таким образом, можно предложить следующий вычислительный алгоритм для решения задачи идентификации (1), (2).

#### Алгоритм.

1. Из (1) формируются вектор-функция  $f(x)$ , из (2) и (3) начальные и конечные данные  $y_0^i$  и  $y_T^i$  ( $i = 1, N$ ), соответственно.

2. Задавая начальные приближения  $y^i, \alpha^i$  вычисляются производные  $\frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial \alpha}$ .
3. Из (6) вычисляется фундаментальная матрица  $\Phi^{k-1}(t, t_0)$ . Далее, строятся матрицы  $\Phi_1^{k-1}(t, t_0)$ ,  $\Phi_2^{k-1}(t, t_0)$  из (7) и функционал  $I_k$  из (8).
4. Решив системы алгебраических уравнений (11) относительно  $\alpha$  из (13), находится значение  $m$  – мерного вектора  $\alpha^k$  в  $k$ -й итерации.
5. Проверяется условие

$$\left| \frac{\partial I_k}{\partial \alpha} \right| < \varepsilon, \quad (16)$$

где  $\varepsilon$  заданное достаточно малое число. Если (16) удовлетворяется, процесс прекращается, иначе переходит к шагу 2.

Сходимость данного алгоритма можно доказать подобно работам [12,13].

Теперь переходим к реализации выше предложенного алгоритма.

## 5. Вычислительный алгоритм

Как видно из вышеприведенного алгоритма, при его выполнении основное место занимает вычисление фундаментальной матрицы  $\Phi^{k-1}(t, t_0)$  и матриц  $\Phi_1^{k-1}(t, t_0)$ ,  $\Phi_2^{k-1}(t, t_0)$ . Как отмечено в [7], восстановление этих матриц являются сложной процедурой. Поэтому, для простоты попытаемся использовать метод Эйлера для решения уравнений (4) и вычисления соответствующих производных. Действительно,  $\frac{\partial f(y(t), \alpha)}{\partial y}$  и  $\frac{\partial f(y(t), \alpha)}{\partial \alpha}$

заменяются на  $\tilde{f}(y) = \frac{f(y + \delta, \alpha) - f(y, \alpha)}{\delta}$  и  $\tilde{f}(\alpha) = \frac{f(y, \alpha + \delta_1) - f(y, \alpha)}{\delta_1}$ ,

соответственно, где  $\delta$  и  $\delta_1$  достаточно малые числа. А для вычисления фундаментальной матрицы  $\Phi^{k-1}(t, t_0)$  и матриц  $\Phi_1^{k-1}(t, t_0)$ ,  $\Phi_2^{k-1}(t, t_0)$ , уравнение (4) заменим дискретным уравнением

$$y^k(t_{2N}) = \left( \prod_{i=2N-1}^j (E + \delta \tilde{f}(y^{k-1}(t_i))) \right) y^k(t_{N+1}) + \Phi_1^{k-1}(t, t_0)\alpha + \Phi_2^{k-1}(t, t_0), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^{k-1}(t, t_0) &= \left( \sum_{j=N+2}^{2N-1} \left( \prod_{i=2N-1}^j (E + \delta \cdot \tilde{f}(y^{k-1}(t_i))) \right) \delta \tilde{f}(\alpha^{k-1}) \right) + \delta \cdot \tilde{f}(\alpha_{2N-1}^{k-1}), \\ \Phi_2^{k-1}(t, t_0) &= \left( \sum_{j=N+2}^{2N-1} \left( \prod_{i=2N-1}^j (E + \delta \cdot \tilde{f}(y^{k-1}(t_i))) \right) \delta \times \right. \\ &\times (f(y^{k-1}(t_{j-1}), \alpha^{k-1}) - \tilde{f}(y^{k-1}(t_{j-1}))) y^{k-1}(t_{j-1}) - \tilde{f}(\alpha^{k-1}) \alpha^{k-1} \Big) + \\ &+ \delta \cdot (f(y^{k-1}(t_{2N-1}), \alpha^{k-1}) - \tilde{f}(y^{k-1}(t_{2N-1}))) y^{k-1}(t_{2N-1}) - \tilde{f}(\alpha^{k-1}) \alpha^{k-1} \Big), \end{aligned} \quad (18)$$

$E$ -единичная матрица соответствующей размерности,  $\Phi^{k-1}(t, t_0)$  является фундаментальной матрицей системы однородных уравнений

$$y^k(t_{i+1}) = \left( E + \delta \tilde{f}(y) \right) \Big|_{\substack{y=y^{k-1} \\ \alpha=\alpha^{k-1}}} \cdot y^k(t_i).$$

Теперь вышеизложенное иллюстрируем на примере добычи нефти газлифтным способом [4,5].

**Пример.** Известно, что неустановившееся движение газа в кольцевом пространстве, а газа-жидкостной смеси (ГЖС) в вертикальных трубах, т.е. в подъемнике газлифтной скважины с постоянным поперечным сечением (Рис.1), описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho\omega_c)}{\partial t} + 2a\rho\omega_c,$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = c^2 \frac{\partial(\rho\omega_c)}{\partial x},$$

где  $P = P(x, t)$ ,  $\omega_c = \omega_c(x, t)$  – избыточное давление над ее стационарным значением и усредненная по сечению скорость движения смеси соответственно;

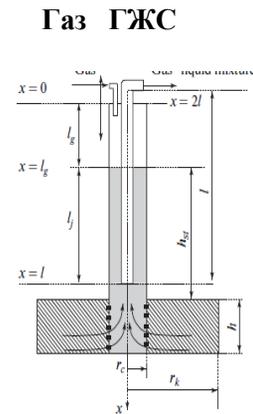
$t, x$  – время и координата соответственно,

$c$  – скорость звука в газе и ГЖС;

$\rho$  – плотность газа, нефти и ГЖС в зависимости от координат;

$2a = \frac{g}{\omega_c} + \frac{\lambda_c \omega_c}{2D}$ ;  $g, \lambda_c$  – ускорение свободного падения и гидравлическое

сопротивление [6] соответственно;  $D$  – внутренние эффективные диаметры подъемника или кольцевого пространства.



Уравнение движения газа и ГЖС в частных производных можно привести к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению с помощью метода усреднения по времени  $t$  [1]:

$$\dot{Q} = \frac{2a(\lambda_c)\rho F Q^2}{c^2 \rho^2 F^2 - Q^2}, \quad Q(0) = u, \quad (19)$$

где  $c \gg \omega_c$ , кроме  $Q = \rho \omega_c F$  все величины считаются постоянными,  $F$  - площадь поперечного сечения насосно-компрессорных труб, которая является постоянной относительно осей.

Здесь предполагается, что переход от конца кольцевой трубы через пласт к началу подъемника ( $x = l$ ) выполняется по следующему разностному уравнению:

$$\begin{aligned} Q(l+0) &= \gamma Q(l-0) + \gamma_1(Q(l-0))\bar{Q}, \\ \gamma_1(Q(l-0)) &= -\delta_3(Q(l-0) - \delta_2)^2 + \delta_1, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\gamma, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  постоянные действительные числа, подлежащие определению. Для простоты предположим, что параметры  $\gamma, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  известны и требуется восстановить коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda_c$ , входящий в (19) через  $\alpha(\lambda_c)$ .

Далее выбираются некоторая номинальная траектория  $Q^0(x)$  и параметр  $\alpha^0$ , предполагая что  $k$ -я итерация уже выполнена. Линеаризуя около этих данных уравнение (19) имеем

$$\dot{Q}^k(x) = A(Q^{k-1}, \alpha^{k-1}) \cdot Q^k(x) + B(Q^{k-1}, \alpha^{k-1}) \alpha^k + C(Q^{k-1}, \alpha^{k-1}), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial y} &= A(Q^{k-1}, \alpha^{k-1}) = \frac{4\alpha^{k-1} c^2 \rho^3 F^3 Q^{k-1}}{(c^2 \rho^2 F^2 - (Q^{k-1})^2)^2}, \\ \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial \alpha} &= B(Q^{k-1}, \alpha^{k-1}) = \frac{2\alpha^{k-1} \rho F Q^{k-1}}{c^2 \rho^2 F^2 - (Q^{k-1})^2}, \\ C(Q^{k-1}, \alpha^{k-1}) &= f(y^{k-1}, \alpha^{k-1}) - \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial y} y^{k-1} - \frac{\partial f(y^{k-1}, \alpha^{k-1})}{\partial \alpha} \alpha^{k-1} = \\ &= \frac{4\alpha^{k-1} c^2 \rho^3 F^3 (Q^{k-1})^2 + 4\alpha^{k-1} \rho F (Q^{k-1})^4}{(c^2 \rho^2 F^2 - (Q^{k-1})^2)^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что с помощью соотношений (17), (18) матрицы  $\Phi^{k-1}(x,0)$ ,  $\Phi_1^{k-1}(x,0)$ ,  $\Phi_2^{k-1}(x,0)$  вычисляются в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{k-1}(x,0) &= \left( \sum_{j=N+2}^{2N-1} \left( \prod_{i=2N-1}^j (E + A(Q^{k-1}(x_{i_i}), \alpha^{k-1})) h \right) B(Q^{k-1}(x_{j-1}), \alpha^{k-1}) h \right) + \\ &+ B(Q^{k-1}(x_{2N-1}), \alpha^{k-1}) h, \\ \Phi_2^{k-1}(x,0) &= \left( \sum_{j=N+2}^{2N-1} \left( \prod_{i=2N-1}^j (E + A(Q^{k-1}(x_{i_i}), \alpha^{k-1})) h \right) C(Q^{k-1}(x_{j-1}), \alpha^{k-1}) h \right) + \\ &+ C(Q^{k-1}(x_{2N-1}), \alpha^{k-1}) h, \end{aligned}$$

где  $h$  достаточно малое число.

Пусть заданы статистические данные, которые являются результатами измерений дебита  $\tilde{Q}_{2n}^i$  при выходе с заданном начальным объемом газа  $\tilde{Q}_0^i$ , т.е.  $\tilde{Q}_0^i$ ,  $\tilde{Q}_{2n}^i$ ,  $i = \overline{1,5}$  известны. Тогда функционал будет имеет следующий вид:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 |\tilde{Q}_{2n}^i - Q_{2n}^i|^2.$$

Пусть параметры уравнения (18) имеют вид:  
при

$$0 \leq x < l - 0: l = 1485 \text{ m}, c = 331 \text{ m/c}, \rho = \frac{0,717 \text{ кг}}{\text{м}^3},$$

$$d = \sqrt{114^2 - 73^2} \cdot 10^{-3} \text{ m}, \lambda = 0,01; \text{ при } l + 0 < x \leq 2l: c = 850 \text{ m/c},$$

$$\rho = \frac{700 \text{ кг}}{\text{м}^3}, d = 0,073 \text{ m}, \lambda = 0,23. \quad (22)$$

Теперь переходим к выполнению выше приведенного алгоритма.

Начальное значение управления  $\lambda_c^0$  примем равным 0 и повторяя процедуру 1-5 определяем значение  $\lambda_c^1$ , где условие “оптимальности” (13) удовлетворяется с точностью до  $10^{-1}$ . При достижении точности  $10^{-4}$  нам требовалось 44 итераций и с помощью использованием метода ортогонализации Грамма-Шмидта [2] был получен следующий результат:

$$\lambda_c \approx 0.229834$$

Отметим, что  $\lambda_c$  отличается от  $\tilde{\lambda}_c = 0.23$  из (22) с точностью до  $10^{-4}$ , а это показывает эффективность предлагаемого алгоритма.

## Литература

1. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах, ISSN 1562-3076. Нелінійні коливання, т.17, №2, 2014. с.151-160.
2. Aliev F.A., İsmailov N.A., Inverse problem to determine the hydrolic resistance coefficient in the gaslift process, Appl. Comput. Math., Vol.12, No.3, 2013, pp.306-313
3. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одной задаче идентификации в линейном стационарном случае. Доклады НАН Азербайджана, т.46, №6, 2010, сс.6-14.
4. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н, Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная Механика т.46, № 6, 2010, с.113-122.
5. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины, Доклады НАНА, № 4, 2008, с.107-116.
6. Altshul D.M. Hidraulic resistance, Moscow: Nedra, 1970, 216p.
7. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами, М.: Наука, 1976, 424с.
8. Apostolyuk A.S., Larin V.B. On linear stationary system identification at regular and irregular measurements, Appl. Comput. Math., Vol.8, No.1, 2009, pp.42-53.
9. Apostolyuk A.S., Larin V.B. Updating of linear stationary dynamic system parameters. Appl. Comput. Math.Vol.10, No.3, 2011, pp.402-408.
10. Aydazade K.R. Computational problems in hydraulic networks, J. Comput. Math. and Math. Phys. , Vol.29, No.2, 1989, pp.184-193.
11. Бахтизин Р. Н., Латыпов А. Р. Оценка порядка линейных объектов по экспериментальной информации, Автомат. и телемех., №3, 1992, с.108–112.
12. Bellman, P.E., Kalaba P.E., Quailinearization and nonlinear boundary problems, Moscow: Mir, 1968, 153p.
13. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.:Мир, 1972, 544 с.
14. Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I. A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation, Appl. Comput. Math. Vol.12, No.1, 2013, pp.91-96.
15. Л. Льюнг. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.:Наука. 1991, 432с.
16. Magnus, J.R., Neudecker H. Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, J. Wiley & Sons, Chichester – New York – Brisbane – Toronto – Singapore 1988, XVII, 393 p.
17. Petersen K.B., Pedersen M.S. The Matrix Cookbook [<http://matrixcookbook.com>] version: november 14, 2008.

18. Himmeblau D.M. Applied Nonlinear Programming, 1972, New-York: Craw-Hill Book Company, 1972, 536p.
19. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭВМ. – Киев : Наук. думка, 1963 – 1966. – ч.1, 1963, 194 с., ч.2, 1966, 244 с.

### **Dinamik sistemlərdə parametrlərin təyini ilə bağlı identifikasiya məsələsi**

**F.Ə. Əliyev, N.A. İsmayilov, Y.S. Qasimov, A.A. Namazov**

#### **XÜLASƏ**

İşdə identifikasiya məsələsinin həlli üçün metod verilir. Bu metod vasitəsilə identifikasiya məsələsi çoxparametrlı optimizasiya məsələsinə gətirilir, sonra kvazixəttiləşdirmə metodundan istifadə edərək həll edilir. Alınan nəticələr neft borularında hidravlik müqavimətin təyini məsələsinin həllinə tətbiq edilir. Həll alqoritmi verilir və misallar üzərində araşdırmalar aparılır.

**Açar sözlər:** hidravlik müqavimət, maye-qaz qatışığı, Qram-Şmidin ortoqanallaşdırılması.

### **On an identification problem on the definition of the parameters of the dynamic system**

**F.A. Aliev, N.A. Ismayilov, Y.S Gasimov, A.A Namazov**

#### **ABSTRACT**

An inverse problem is considered to the definition of the parameters, involved in the right hand side of the system of nonlinear ordinary differential equations by given initial and final conditions. The solution of the problem is reduced to the solving of the minimization problem for the quadratic functional, which is indeed deviation of the value of the solution from the given quantities at the end points. Using the quasilinearization method a calculation method is proposed to the solution of the considered problem. The application of this method is tested and demonstrated on the example on the definition of the hydraulic resistance in the tubes.

**Keywords:** hydraulic resistance, gas-liquid mixture, Gram-Schmidts orthogonalization.